

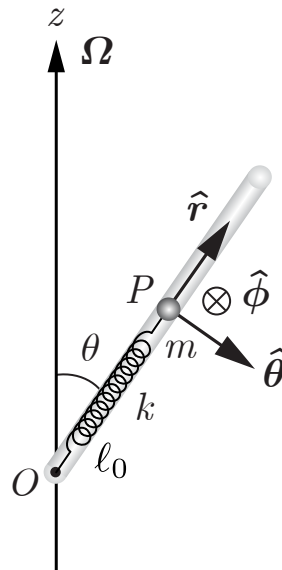


1. Tube en rotation avec ressort (3.5/10 points)

Nom :

Prénom :

N° Sciper :



Une bille de masse m , considérée comme un point matériel P , coulisse sans frottement dans un tube. Le tube est en rotation à vitesse angulaire $\Omega = \Omega \hat{z}$, où $\Omega = \text{cste} > 0$, dans le sens trigonométrique autour de l'axe vertical Oz . Lors de la rotation du tube, l'angle d'inclinaison constant de l'axe du tube par rapport à l'axe vertical Oz est $\theta = \text{cste}$ où $0 < \theta < \pi$. La bille est attachée à un ressort de constante élastique k et de longueur au repos ℓ_0 . L'autre extrémité du ressort est fixée à l'origine O .

On attache un repère sphérique $(P, \hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ à la bille et on décrit son mouvement par rapport au référentiel d'inertie $\mathcal{R}$ de la terre.

Les réponses doivent être exprimées en termes des grandeurs scalaires données ci-dessus, des coordonnées sphériques r , θ et ϕ , de leurs dérivées temporelles, des vecteurs de base $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ et $\hat{\phi}$ du repère sphérique et de la norme du champ gravitationnel g .

Questions et réponses au verso !

1. **(1.0 point)** Déterminer la norme et l'orientation de la force de réaction normale $\mathbf{N}$ exercée par le tube sur la bille en fonction de son mouvement.

$\mathbf{N} = \dots\dots\dots$

2. **(0.5 point)** Déterminer la coordonnée radiale d'équilibre r_0 de la bille, c'est à dire la coordonnée pour laquelle il n'y a pas de mouvement relatif de la bille par rapport au tube pour une vitesse angulaire Ω telle que $\Omega^2 \sin^2 \theta \neq k/m$.

$r_0 = \dots\dots\dots$

3. **(1.0 point)** Déterminer la condition sur la vitesse angulaire Ω pour que la position d'équilibre r_0 soit une position d'équilibre stable, c'est-à-dire que le mouvement radial autour de la position d'équilibre soit un mouvement harmonique oscillatoire, et déterminer la période T de ce mouvement d'oscillation.

$\Omega \dots\dots\dots$

$T = \dots\dots\dots$

4. **(0.5 point)** Déterminer l'énergie mécanique E de la bille par rapport au référentiel d'inertie $\mathcal{R}$ de la terre en prenant comme référence d'énergie potentielle de pesanteur le plan horizontal contenant l'origine O et comme référence d'énergie potentielle élastique l'extrémité du ressort en absence de déformation.

$E = \dots\dots\dots$

5. **(0.5 point)** L'énergie mécanique E de la bille par rapport au référentiel d'inertie $\mathcal{R}$ de la terre est-elle constante quel que soit le mouvement de la bille dans le tube ?

Oui ☐ Non ☐

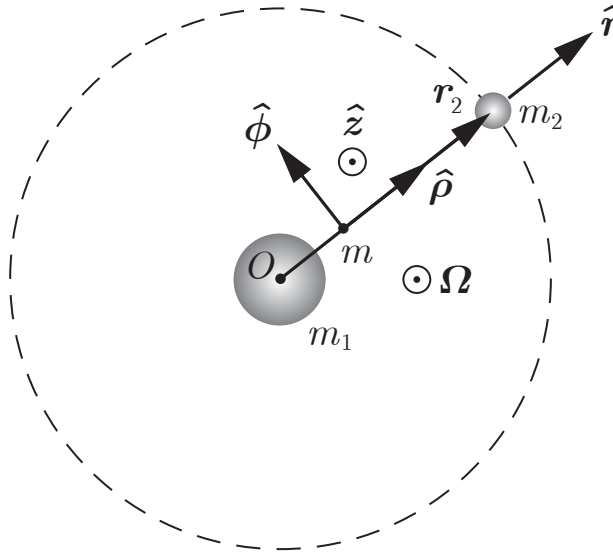
Si non, quelle condition faut-il imposer pour que l'énergie mécanique E soit constante ?

$\dots\dots\dots$

Nom :

Prénom :

N° Sciper :



On considère un système stellaire constitué de deux astres : une étoile de masse m_1 et une exoplanète de masse m_2 . L'étoile a une masse beaucoup plus grande que l'exoplanète, i.e. $m_1 \gg m_2$. Les astres sont traités comme des points matériels et le système est considéré comme isolé car on peut négliger l'influence gravitationnelle du reste de l'univers. On prend comme origine O le centre de masse de l'étoile. L'exoplanète a un mouvement de rotation circulaire uniforme autour de l'étoile dans le plan stellaire par rapport au référentiel d'inertie $\mathcal{R}$ centré à l'origine O . Ce mouvement est décrit par le vecteur vitesse angulaire $\Omega = \Omega \hat{z}$ où $\Omega = \text{cste} > 0$. Dans le référentiel accéléré $\mathcal{R}'$ où les astres sont immobiles, le vecteur position de l'exoplanète est $\mathbf{r}_2 = r_2 \hat{\mathbf{r}}$.

Une sonde de masse m considérée comme un point matériel P a un mouvement rectiligne le long de l'axe qui lie l'étoile à l'exoplanète. On attache un repère polaire $(P, \hat{\rho}, \hat{\phi})$ à la sonde. La masse m de la sonde est négligeable par rapport aux masses m_1 et m_2 . Ainsi, la présence de la sonde ne modifie pas le mouvement des astres.

Les réponses doivent être exprimées en termes des grandeurs scalaires données ci-dessus, des coordonnées polaires ρ et ϕ , de leurs dérivées temporelles, des vecteurs de base $\hat{\rho}$ et $\hat{\phi}$ du repère polaire et de la constante de la gravitation universelle G .

Questions et réponses au verso !

1. **(0.5 point)** Dans le référentiel d'inertie $\mathcal{R}$ centré à l'origine O , déterminer la vitesse angulaire scalaire Ω qui décrit la rotation uniforme de l'exoplanète autour de l'étoile.

$\Omega =$

2. **(1.5 point)** Dans le référentiel accéléré $\mathcal{R}'$ où les astres sont immobiles, la sonde a un mouvement rectiligne le long de l'axe qui lie l'étoile à l'exoplanète. Ce mouvement est dû à son moteur qui exerce une force $\mathbf{F} = F \hat{\phi}$ orthogonale au mouvement. Déterminer la norme et l'orientation des autres forces exercées sur la sonde.

.....

.....

.....

3. **(0.5 point)** Dans le référentiel accéléré $\mathcal{R}'$ où les astres sont immobiles, déterminer l'équation du mouvement de la sonde selon la ligne de coordonnée radiale de vecteur unitaire $\hat{\rho}$.

selon $\hat{\rho}$:

4. **(0.5 point)** Dans le référentiel accéléré $\mathcal{R}'$ où les astres sont immobiles, déterminer la coordonnée radiale d'équilibre ρ_0 de la sonde entre les deux astres. La démarche à suivre consiste à utiliser la distance $r_0 = r_2 - \rho_0 > 0$ qui sépare la coordonnée d'équilibre et l'exoplanète, où $r_0/r_2 \ll 1$ car $m_2 \ll m_1$, puis à se servir du développement limité au premier ordre en r_0/r_2 suivant,

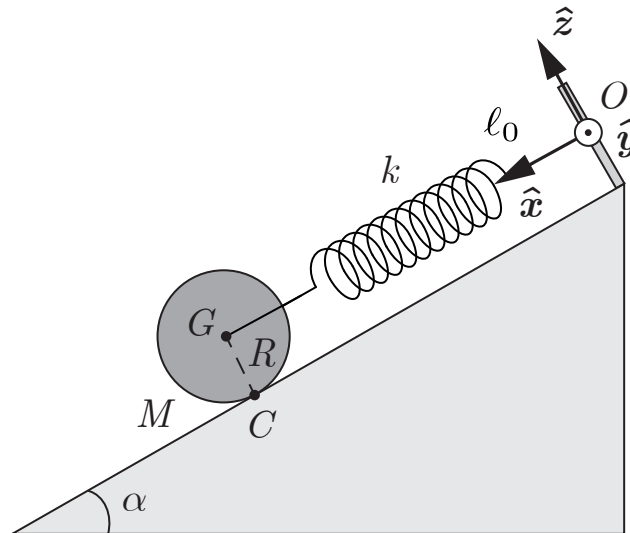
$$\frac{1}{(r_2 - r_0)^2} = \frac{1}{r_2^2 \left(1 - \frac{r_0}{r_2}\right)^2} \simeq \frac{1}{r_2^2} \left(1 + 2 \frac{r_0}{r_2}\right)$$

pour déterminer r_0 . La position d'équilibre est appelé le point de Lagrange L_1 et la distance r_0 est le rayon de la sphère de Hill de l'exoplanète.

$\rho_0 =$

5. **(0.5 point)** La sonde de masse m s'est posée sur la surface de l'exoplanète sphérique de masse m_2 et de rayon R_0 . Déterminer la norme de la vitesse minimale de décollage $\mathbf{v}_0 = v_0 \hat{\mathbf{r}}$ de la sonde à la surface de l'exoplanète afin que sa vitesse soit $\mathbf{v}_1 = v_1 \hat{\mathbf{r}}$ à une distance R_1 du centre de l'exoplanète. On néglige les effets de l'attraction gravitationnelle de l'étoile et de la rotation de l'exoplanète autour de l'étoile sur le mouvement de la sonde, c'est-à-dire qu'on considère l'exoplanète comme un référentiel d'inertie isolé.

$v_0 =$

Nom : Prénom : N° Sciper : 

On considère un cylindre plein, homogène, de rayon R et de masse M qui roule sans glisser sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. L'axe de symétrie horizontal du cylindre qui passe par son centre de masse G est attaché à un ressort de constante élastique k et de longueur à vide ℓ_0 dont l'autre extrémité est fixée au sommet du plan incliné. Un mécanisme assure que l'axe du cylindre reste horizontal. Le moment d'inertie du cylindre par rapport à son axe de symétrie passant par son centre de masse est $I_G = \frac{1}{2} MR^2$. L'origine O est prise au point d'attache du ressort au haut du plan incliné.

Les réponses doivent être exprimées en termes des grandeurs scalaires données ci-dessus, des coordonnées cartésiennes x , y et z , de leurs dérivées temporelles, des vecteurs de base $\hat{x}$, $\hat{y}$ et $\hat{z}$ du repère cartésien et de la norme du champ gravitationnel g .

Questions et réponses au verso !

1. **(0.5 point)** Déterminer la norme et l'orientation du moment cinétique $\mathbf{L}_C$ du cylindre évalué par rapport au point de contact C entre le cylindre et le plan incliné.

$$\mathbf{L}_C = \dots\dots\dots$$

2. **(0.5 point)** Déterminer la norme et l'orientation de la résultante des moments de forces extérieures $\mathbf{M}_C^{\text{ext}}$ évaluée par rapport au point de contact C entre le cylindre et le plan incliné explicitement en fonction de M et k .

$$\mathbf{M}_C^{\text{ext}} = \dots\dots\dots$$

3. **(1.0 point)** Déterminer l'équation du mouvement du centre de masse du cylindre et en déduire la période d'oscillation T .

$$\dots\dots\dots$$

$$T = \dots\dots\dots$$

4. **(0.5 point)** Déterminer l'évolution temporelle $X_G(t)$ de la coordonnée d'abscisse du centre de masse du cylindre compte tenu des conditions initiales suivantes,

$$X_G(0) = R + \ell_0 + \frac{Mg}{k} \sin \alpha \quad \text{et} \quad \dot{X}_G(0) = 0$$

$$X_G(t) = \dots\dots\dots$$

5. **(0.5 point)** Déterminer l'évolution temporelle $F_s(t)$ de la composante de la force de frottement statique $\mathbf{F}_s(t) = F_s(t) \hat{\mathbf{x}}$ exercée par le plan incliné sur le cylindre en fonction de la coordonnée de position du centre de masse $X_G(t)$.

$$F_s(t) = \dots\dots\dots$$